Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Problemas de Cálculo
Ejercicios de sucesiones y series de funciones

Javier Pérez

Directorio

- Tabla de Contenidos
- Inicio del documento

Actualizado el 21 de abril de 2002 Versión Abril, 2002

Tabla de Contenidos

1. Sucesiones y series de funciones. Convergencia puntual y uniforme

1.1. Sucesiones de funciones

1.2. Series de funciones. Convergencia puntual y uniforme

1.3. Series de potencias

Soluciones de los ejercicios

1. Sucesiones y series de funciones. Convergencia puntual y uniforme

1.1. Sucesiones de funciones

En estos ejercicios estudiamos los conceptos de convergencia puntual y uniforme. Como sabes, el *campo de convergencia puntual* de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ que suponemos definidas en un intervalo I, es el conjunto $C = \{x \in I : \{f_n(x)\}$ es convergente$\}$; y, supuesto que $C \neq \emptyset$, la *función límite puntual* de $\{f_n\}$ es la función $f : C \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{lím}\{f_n(x)\}$ para todo $x \in C$. Se dice también que la sucesión $\{f_n\}$ *converge puntualmente en* C.

Dado un intervalo $J \subseteq C$, sea $\beta_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\}$. Entonces, si $\text{lím}\{\beta_n\} = 0$, se dice que $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* J.

En la práctica, el estudio de la convergencia puntual se reduce a calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}$, lo que suele ser muy sencillo. Mientras que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo J, lo que se hace es calcular, con las técnicas usuales de derivación, el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J. La presencia del valor absoluto en $|f_n(x) - f(x)|$ es incómoda para derivar por lo que conviene quitarlo, lo que casi siempre puede hacerse. Supongamos que el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J se alcanza en un punto $c_n \in J$. Entonces $\beta_n = |f_n(c_n) - f(c_n)|$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente en J si, y sólo si, $\lim\{\beta_n\} = 0$.

Ejercicio 1. Estudiar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$ y en intervalos del tipo $[a, +\infty[$, $(a > 0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ por $f_n(x) = n^2 x \,\mathrm{e}^{-nx}$.

Ejercicio 2. Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0, a]$ y $[a, +\infty[$, $(a > 0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}$$

para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$

Ejercicio 3. Estudiar la convergencia uniforme en $[0, 1]$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para $x \in]0, 1]$ por $f_n(x) = x^n \log(1/x)$, y $f_n(0) = 0$.

Ejercicio 4. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n(x) = n^{\alpha} x (1 - x^2)^n$$

¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0,1]$? ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho, 1]$, donde $0 < \rho < 1$?

En los ejercicios anteriores hemos podido calcular el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en el intervalo donde estudiamos la convergencia uniforme (observa que las sucesiones estudiadas son de funciones positivas que convergen puntualmente a la función cero).
No siempre vamos a ser tan afortunados. Puede ocurrir que la derivada sea complicada y no podamos calcular de forma explícita sus ceros o que sea difícil estudiar la convergencia de la sucesión de los valores máximos de las funciones $|f_n(x) - f(x)|$.
Cuando esto ocurra no hay que olvidar que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo J lo que interesa es saber si la sucesión

$$\beta_n = \text{máx}\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\}$$

converge o no converge a cero. Para ello **no es imprescindible calcular el valor exacto** de β_n. Las siguientes dos estrategias son de gran utilidad.

• Si podemos probar una desigualdad del tipo

$$\max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leqslant \alpha_n$$

donde $\lim\{\alpha_n\} = 0$ entonces es claro que también $\lim\{\beta_n\} = 0$.

• Si encontramos puntos $x_n \in J$ tales que la sucesión $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ no converja a cero, entonces, como evidentemente $\beta_n \geqslant |f_n(x_n) - f(x_n)|$, se sigue que tampoco $\{\beta_n\}$ converge a cero.

Ten en cuenta que con frecuencia la función límite puntual es la función cero lo que facilita las acotaciones.

Ejercicio 5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x$$

Estudiar la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en los intervalos $[0, a]$ y $[a, \pi/2]$ donde $0 < a < \pi/2$.

Ejercicio 6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x}$$

Estudiar la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo $]0, a]$, $[a, \pi[$ y $[a, b]$ donde $0 < a < b < \pi$.

Ejercicio 7. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$.

Ejercicio 8. Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $]-\infty, -a]$, $[-a, a]$ y $[a, +\infty[$, $(a > 0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f_n(x) = n \operatorname{sen}(x/n)$.

Ejercicio 9. Estudiar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ por

$$f_n(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{n + x}{1 + nx}\right)$$

1.2. Series de funciones. Convergencia puntual y uniforme

Recuerda que, dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, podemos formar otra, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando *consecutivamente* los de $\{f_n\}$. Es decir, $F_1 = f_1$, $F_2 = f_1 + f_2$, $F_3 = f_1 + f_2 + f_3$, en general $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. La sucesión $\{F_n\}$ así definida se llama *serie de término general* f_n y la representaremos por el símbolo $\sum_{n\geqslant 1} f_n$. Los conceptos de convergencia puntual y uniforme para sucesiones de funciones se aplican igual para series. Así el campo de convergencia puntual de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ cuyas funciones f_n suponemos definidas en un intervalo I, es el conjunto $C = \{x \in I : \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) \text{ es convergente}\}$.

La única novedad es que ahora también podemos considerar el *campo de convergencia absoluta* de la serie, que es el conjunto

$$A = \{x \in I : \sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)| \text{ es convergente}\}$$

El siguiente resultado es el más útil para estudiar la convergencia uniforme y absoluta de una serie.

Criterio de Weierstrass. Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones, A un conjunto y $n_0\in\mathbb{N}$ tales que para todo $x\in A$ y para todo $n\geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(x)|\leqslant \alpha_n$, donde la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\alpha_n$ es convergente. Entonces $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente y absolutamente en A.

Ejercicio 10. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea

$$f_n(x)=\frac{x}{n^a(1+nx^2)}$$

Probar que la serie $\sum f_n$
a) Converge puntualmente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a>0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.
b) Converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a>1/2$.

Ejercicio 11. Para cada número natural n sea $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x)=x^n(\log x)^2$, y $f_n(0)=0$. Estúdiese si la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$ y dedúzcase que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(\log x)^2}{1-x}dx = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

Ejercicio 12. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones $\sum f_n$ donde, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Sea $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, la función suma de la serie. Calcular $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)$ y $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$.

Sugerencia. Para $x > 0$ se tiene que

$$\int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2}dt \leqslant f_k(x) = \int_k^{k+1} \frac{x}{1+k^2x^2}dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{x}{1+t^2x^2}dt$$

Ejercicio 13. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$ donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!}x^n\,\mathrm{e}^{-nx} \quad (x \geqslant 0)$$

1.3. Series de potencias

Ejercicio 14. Calcular la función suma de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Ejercicio 15. Dado un número natural $q \in \mathbb{N}$, probar la igualdad

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{qn+1}$$

y obtener el valor de la suma de las series correspondientes a $q = 1,2,3$.

Ejercicio 16. Calcular la función suma de las series de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n} \quad \text{y} \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{n(x+3)^n}{2^n}$$

Ejercicio 17. Expresar la suma de las series $\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$, y $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n+1} x^n$ por medio de funciones elementales y calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$.

Ejercicio 18. Calcular el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+n+3}{n+1}x^n; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}x^n; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+2+\cdots+n}x^n$$

Ejercicio 19. Calcular la función suma de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(2n+1)}$ y deducir el valor de las sumas de las series

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(2n+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$$

Ejercicio 20. Probar que las funciones definidas por:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \ g(0) = 1, \qquad f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \ f(0) = 1$$

$$h(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}, \ h(0) = -1/2, \quad \varphi(x) = \frac{\log(1+x)}{x}, \ \varphi(0) = 1$$

son de clase C^∞ en su intervalo natural de definición.

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 1.

$f_n(0) = 0$, y si $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \lim_{n\to\infty} n^2(\mathrm{e}^{-x})^n = 0$ (porque es una sucesión de la forma $n^k\lambda^n$ donde $0 < \lambda < 1$). Por tanto, la función límite puntal, $f(x) = \lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$. Observa que $f_n(x) \geqslant 0$, por lo que

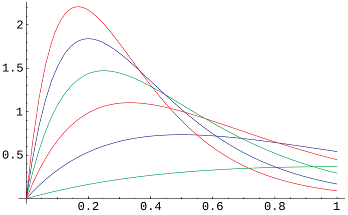
$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$$

Como $f_n'(x) = n^2\,\mathrm{e}^{-nx}(1 - nx)$, se deduce que $f_n'(x) > 0$ para $0 \leqslant x < 1/n$, y $f_n'(x) < 0$ para $x > 1/n$. Luego $f_n(x) \leqslant f_n(1/n)$ para todo $x \geqslant 0$. Deducimos que

$$f_n(1/n) = \max\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}_o^+\}$$

y como $f_n(1/n) = n/e$, sucesión que, evidentemente, no converge a 0, concluimos que no hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en un intervalo de la forma $[a, +\infty[$, con $a > 0$. Por lo antes visto, sabemos que la función f_n es decreciente en el intervalo $[1/n, +\infty[$. Sea n_o un número natural tal que $\frac{1}{n_o} < a$. Entonces, para todo $n \geqslant n_o$, tenemos que $[a, +\infty[\subseteq [1/n, +\infty[$, por lo que, $\max\{f_n(x) : x \in [a, +\infty[\} = f_n(a)$. Como $\lim\{f_n(a)\} = 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, +\infty[$.



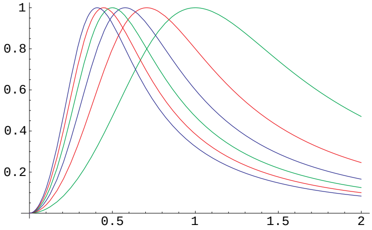
La sucesión $f_n(x) = n^2 x\, \mathrm{e}^{-nx}$

Como información adicional, comprueba que $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = 1 - (1+n)\,\mathrm{e}^{-n}$ y,

por tanto $1 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0.$ ◀

Ejercicio 2.

Es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=0$. Como $f_n'(x)=4nx\dfrac{1-n^2x^4}{(1+n^2x^4)^2}$, tenemos que $f_n'(1/\sqrt{n})=0$, $f_n'(x)>0$ para $0<x<1/\sqrt{n}$ y $f_n'(x)<0$ para $x>1/\sqrt{n}$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0,1/\sqrt{n}]$ y estrictamente decreciente en $[1/\sqrt{n},+\infty[$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $\mathbb{R}_o^+$ en el punto $x_n=1/\sqrt{n}$.



La sucesión $f_n(x)=\dfrac{2nx^2}{1+n^2x^4}$

Dado un número $a > 0$ sea n_0 tal que $x_{n_0} < a$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < a$, y por tanto

$$\text{máx}\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} = f_n(x_n) = 1, \quad \text{máx}\{f_n(x) : x \geqslant a\} = f_n(a)$$

Como $\text{lím}\{f_n(a)\} = 0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, +\infty[$ pero, evidentemente, no converge uniformemente en $[0, a]$. ◀

Ejercicio 3.
Es evidente que $\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$. Como $f_n'(x) = -\big(n\log x + 1\big)x^{n-1}$ tenemos que $f_n'(x) = 0$ si, y sólo si, $\log x = -1/n$, es decir, $x = \mathrm{e}^{-1/n}$. Además $f_n'(x) > 0$ para $0 < x < \mathrm{e}^{-1/n}$ y $f_n'(x) < 0$ para $\mathrm{e}^{-1/n} < x \leqslant 1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $]0, \mathrm{e}^{-1/n}]$ y estrictamente decreciente en $[\mathrm{e}^{-1/n}, 1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0,1]$ en el punto $x_n = \mathrm{e}^{-1/n}$. Por tanto

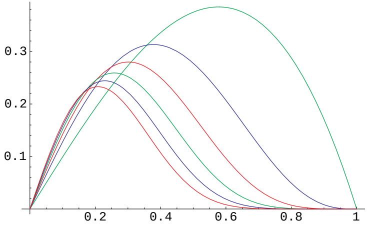
$$\max\{f_n(x) : x \in]0,1]\} = f_n(\mathrm{e}^{-1/n}) = \frac{1}{\mathrm{e}}\,\frac{1}{n}$$

y, deducimos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ ◄

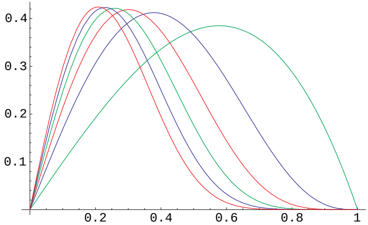
Ejercicio 4.
Observa que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ y, si $0 < x < 1$, la sucesión $\{n^\alpha(1-x^2)^n\}$ es de la forma $\{n^\alpha\lambda^n\}$ con $0 < \lambda < 1$ por lo que $\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$. Por tanto, en el intervalo $[0,1]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero.
Tenemos que

$$f_n'(x) = n^\alpha(1-x^2)^{n-1}(1-(1+2n)x^2)$$

Pongamos $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}$. Entonces $f_n'(x_n) = 0$, $f_n'(x) > 0$ para $0 < x < x_n$ y $f_n'(x) < 0$ para $x_n < x < 1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0,x_n]$ y estrictamente decreciente en $[x_n,1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0,1]$ en el punto x_n.



La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/4$



La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/2$

Como

$$f_n(x_n) = \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n$$

se deduce que $\lim\{f_n(x_n)\} = 0$ si, y sólo si, $\alpha < 1/2$. Pot tanto, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ si, y sólo si, $\alpha < 1/2$.

Dado $0 < \rho < 1$, sea n_0 tal que $x_{n_0} < \rho$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < \rho$ y por tanto $\max\{f_n(x) : \rho \leqslant x \leqslant 1\} = f_n(\rho) \to 0$ por lo que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, 1]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. ◀

Ejercicio 5. Es claro que $f_n(0) = f_n(\pi/2) = 0$ y para $0 < x < \pi/2$ la sucesión $\{n(\cos x)^n\}$ es de la forma $\{n\lambda^n\}$ con $0 < \lambda < 1$ por lo que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$. Por tanto, en el intervalo $[0,\pi/2]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero. Observa también que $f_n(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [0,\pi/2]$.
Intentemos calcular el máximo absoluto de $f_n(x)$ en $[0,\pi/2]$. Tenemos que

$$f_n'(x) = n(\cos x)^{n-1}(\cos^2(x) - n\operatorname{sen}^2(x))$$

Sea $x_n \in]0,\pi/2[$ tal que $\cos^2(x_n) - n\operatorname{sen}^2(x_n) = 0$. Como f_n es positiva y se anula en los extremos del intervalo, es evidente que f_n alcanza su mayor valor en $[0,\pi/2]$ en el punto x_n. Observa que $x_n = \sqrt{\operatorname{arc\,tg}(1/n)} \to 0$.
Tenemos que

$$f_n(x_n) = n(\cos(x_n))^n \operatorname{sen}(x_n)$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión no es del todo inmediato. Pongamos $f_n(x_n) = y_n z_n$ donde $y_n = n\operatorname{sen}(x_n)$, $z_n = (\cos(x_n))^n$. Entonces

$$y_n = n\,x_n\frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} = \sqrt{n}\sqrt{n\operatorname{arc\,tg}(1/n)}\frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n}$$

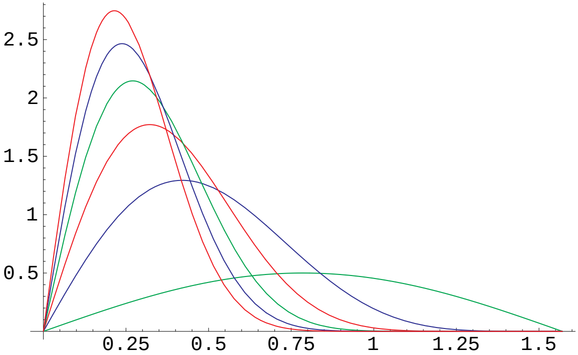
y como $\dfrac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} \to 1$ y $n \operatorname{arc\,tg}(1/n) \to 1$, se sigue que $y_n \to +\infty$ (de hecho, se tiene que y_n es asintóticamente equivalente a $\sqrt{n}$, esto es, $y_n \sim \sqrt{n}$).
Por otra parte, tenemos que

$$\log(z_n) = n\log(\cos x_n) \sim n(\cos(x_n) - 1) \sim n\frac{-1}{2}x_n^2 = \frac{-1}{2}n \operatorname{arc\,tg}(1/n) \to \frac{-1}{2}$$

Por tanto $z_n \to \mathrm{e}^{-1/2}$. Deducimos así que $f_n(x_n) = y_n z_n \to +\infty$.
Dado un número $0 < a < \pi/2$, sea n_0 tal que $x_{n_0} < a$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < a$. Por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ es

$$\max\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} = f_n(x_n) \qquad \max\{f_n(x) : a \leqslant x \leqslant \pi/2\} = f_n(a)$$

Como $\{f_n(x_n)\}$ no converge a 0 se sigue que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0,a]$. Como $\{f_n(a)\} \to 0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a,\pi/2]$



La sucesión $f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x$

Hagamos este mismo ejercicio sin calcular el valor máximo de f_n, acotando de forma conveniente.

Lo primero que nos damos cuenta es de que es muy fácil probar que hay convergencia uniforme en $[a, \pi/2]$, pues como la función coseno es decreciente en $[0,\pi/2]$ y $\operatorname{sen} x \leqslant 1$, se tiene que

$$0 \leqslant f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x \leqslant n(\cos a)^n$$

para todo $x \in [a,\pi/2]$. Puesto que la sucesión $\{n(\cos a)^n\} \to 0$ (es de la forma $n\lambda^n$ con $0 < \lambda < 1$) concluimos que hay convergencia uniforme en $[a,\pi/2]$.
La situación es distinta en el intervalo $[0,a]$. Podemos sospechar que no hay convergencia uniforme en dicho intervalo. Para ello, tomemos $u_n = 1/n$. Tenemos que

$$f_n(1/n) = n \operatorname{sen}(1/n)(\cos(1/n))^n$$

y como $\{n \operatorname{sen}(1/n)\} \to 1$ y

$$\text{lím}\{(\cos(1/n))^n\} = \exp\left(\text{lím}\{n(\cos(1/n) - 1)\}\right) = \exp(0) = 1$$

obtenemos que $\{f_n(1/n)\} \to 1$. Como, para todo $n > 1/a$ se verifica que $0 < 1/n < a$, resulta que

$$\text{máx}\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} \geqslant f_n(1/n)$$

y concluimos que no hay convergencia uniforme en $[0,a]$. ◀

Ejercicio 6. Evidentemente $\lim\{f_n(x)\} = 0$. Observa también que $f_n(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]0,\pi[$. Para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo de la forma $]0,a]$ tomemos $x_n = 1/n$. Como

$$f_n(1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(1)}{n\operatorname{sen}(1/n)} \to \operatorname{sen}^2(1)$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en $]0,a]$.
Análogamente, como

$$f_n(\pi - 1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(n\pi - 1)}{n\operatorname{sen}(\pi - 1/n)} \to \operatorname{sen}^2(1)$$

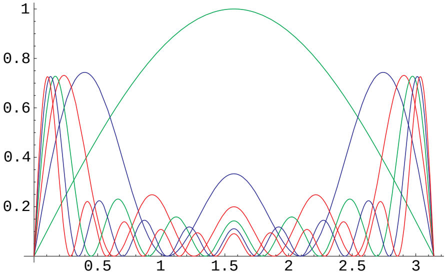
deducimos que no hay convergencia uniforme en $[a,\pi[$.
Finalmente, sea $0 < a < b < \pi$. Como $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $x \in [a,b]$ y por el teorema de Weierstrass sabemos que tiene que haber un punto $x_o \in [a,b]$ tal que $\operatorname{sen} x_o \leqslant \operatorname{sen} x$ para todo $x \in [a,b]$, deducimos que

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n\operatorname{sen} x} \leqslant \frac{1}{n\operatorname{sen}(x_o)}$$

y por tanto

$$\max\{f_n(x) : a \leqslant x \leqslant b\} \leqslant \frac{1}{n\,\mathrm{sen}(x_o)}$$

Ya que, evidentemente, $\{1/n\,\mathrm{sen}(x_o)\} \to 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a,b]$.



La sucesión $f_n(x) = \frac{\mathrm{sen}^2(nx)}{n\,\mathrm{sen}\,x}$

◄

Ejercicio 7.

Para calcular la función límite puntual hay que distinguir dos casos:

• Si $|x| < 1$, entonces $1 \leqslant \sqrt[n]{1+x^{2n}} \leqslant 1+x^{2n}$ y por tanto $\lim\{f_n(x_n)\} = 1$.

• Si $|x| \geqslant 1$, entonces $x^2 \leqslant \sqrt[n]{1+x^{2n}} \leqslant 2^{1/n}x^2$ y por tanto $\lim\{f_n(x_n)\} = x^2$.

La función límite puntual viene dada por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ x^2, & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Tenemos que

• Si $|x| < 1$ es

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - 1 \leqslant 2^{1/n} - 1$$

• Si $|x| \geqslant 1$ es

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - x^2 = x^2\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^{2n}}} - 1\right) \tag{1}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $h(t) = \sqrt[n]{1+t}$ en el intervalo $[0,s]$ obtenemos que $\dfrac{h(s)-h(0)}{s}=h'(c)$ donde c es algún punto del intervalo $]0,s[$. Como

$$h'(c)=\frac{1}{n}(1+c)^{1/n-1}\leqslant\frac{1}{n}$$

se sigue que $h(s)-h(0)=sh'(c)\leqslant\dfrac{s}{n}$. Tomando $s=\dfrac{1}{x^{2n}}$ resulta que

$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^{2n}}}-1=h(1/x^{2n})-h(0)\leqslant\frac{1}{nx^{2n}}\leqslant\frac{1}{nx^2}$$

Deducimos ahora de (1) que $0\leqslant f_n(x)-f(x)\leqslant\dfrac{1}{n}$.

Finalmente

$$\text{máx}\{|f_n(x)-f(x)|:x\in\mathbb{R}\}\leqslant\text{máx}\left\{2^{1/n}-1,1/n\right\}$$

y concluimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Observa que, aunque la convergencia es uniforme y todas las funciones f_n son derivables en $\mathbb{R}$, la función límite, f, no es derivable en $x=1$. ◀

Ejercicio 8.
Definamos la función

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \ (t \neq 0),\ \varphi(0) = 1$$

Con ello, tenemos que $f_n(x) = x\varphi(x/n)$ y, como $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = 1$, deducimos que la función límite viene dada por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \qquad (x\in\mathbb{R})$$

Dado $a > 0$, es fácil comprobar que no hay convergencia uniforme en $[a, +\infty[$, pues para todo $n \geqslant a$ se tiene que

$$\max\{|f(x) - f_n(x)| : x \geqslant a\} \geqslant f(n) - f_n(n) = n(1 - \operatorname{sen}(1)) \to +\infty$$

Análogamente se prueba que no hay convergencia uniforme en $]-\infty, -a]$.
Estudiemos si hay convergencia uniforme en $[-a, a]$. Para todo $x \in [-a, a]$ tenemos que

$$|f(x) - f_n(x)| = |x - x\varphi(x/n)| = |x||1 - \varphi(x/n)| \leqslant a|1 - \varphi(x/n)|$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $|1-\varphi(t)| < \varepsilon/a$ siempre que $|t| < \delta$. Tomemos un número natural n_0 tal que $1/n_0 < \delta/a$. Entonces, para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in [-a,a]$ se tiene que $|x/n| \leqslant a/n \leqslant a/n_0 < \delta$ por lo que

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant a|1-\varphi(x/n)| < \varepsilon$$

y por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ es $\max\{|f(x)-f_n(x)| : x \in [-a,a]\} < \varepsilon$. Hemos probado así que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[-a,a]$.

◀

Ejercicio 9.
Como $f_n(0) = \operatorname{arctg} n$, y $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t = \pi/2$, la función límite viene dada por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/x), & \text{si } x > 0 \\ \pi/2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Observa que se trata de una función continua en $\mathbb{R}_o^+$. Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$. Para ello es conveniente conocer el signo de la función $f_n(x) - f(x)$. Como la función arcotangente es inyectiva, se sigue que $f_n(x) - f(x) = 0$ si, y sólo si, $(n+x)/(1+nx) = 1/x$ lo que equivale a $x = 1$ (la otra posibilidad $x = -1$ se descarta porque suponemos que $x > 0$). En consecuencia, la función $f_n(x) - f(x)$ debe tener signo constante en cada intervalo $[0,1[$ y en $]1,+\infty[$. Como

$$f_n(0) - f(0) = \operatorname{arctg} n - \pi/2 < 0, \text{ y } \lim_{x\to+\infty}(f_n(x) - f(x)) = \operatorname{arctg}(1/n) > 0$$

se sigue que $f_n(x) - f(x) < 0$ para $x \in [0,1[$, y $f_n(x) - f(x) > 0$ para $x > 1$.

Estudiemos ahora la derivada de $f_n(x)-f(x)$. Un cálculo sencillo nos da

$$f_n'(x)-f'(x)=2\frac{1+2nx+x^2}{(1+x^2)((1+n^2)x^2+4nx+1+n^2)}$$

por tanto $f_n'(x)-f'(x)>0$ para todo $x>0$. En consecuencia f_n-f es una función creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Como

$$|f_n(x)-f(x)|=\begin{cases} f(x)-f_n(x), & \text{si } x\in[0,1] \\ f_n(x)-f(x), & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$$

Resulta que la función $|f_n-f|$ es decreciente en $[0,1]$ y creciente en $[1,+\infty[$. Concluimos que

$$|f_n(x)-f(x)|=\begin{cases} f(x)-f_n(x)\leqslant f(0)-f_n(0)=\pi/2-\operatorname{arc\,tg} n, & (x\in[0,1]) \\ f_n(x)-f(x)\leqslant \lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x)-f(x))=\operatorname{arc\,tg}(1/n), & (x\geqslant 1) \end{cases}$$

Por tanto, para todo $x\geqslant 0$, es

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant \beta_n=\max\{\pi/2-\operatorname{arc\,tg} n, \operatorname{arc\,tg}(1/n)\}$$

y como $\{\beta_n\}\to 0$, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$. ◀

Ejercicio 10. a) Como se pide estudiar la convergencia en $\mathbb{R}_o^+$, consideraremos en lo que sigue que $x \geqslant 0$. La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^a(1+nx^2)}$ es de términos positivos y, para $x > 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} n^{1+a} \frac{x}{n^a(1+nx^2)} = \frac{1}{x}$$

Por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera), se sigue que la serie converge si, y sólo, si $1+a > 1$, es decir $a > 0$.

Estudiemos la convergencia uniforme en una semirrecta del tipo $[\rho, +\infty[$, $(\rho > 0)$. Como

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \frac{1-x^2n}{(1+nx^2)^2}$$

se deduce fácilmente que f_n es creciente en $[0, 1/\sqrt{n}]$ y decreciente en $[1/\sqrt{n}, +\infty[$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/\sqrt{n_0} < \rho$. Para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $1/\sqrt{n} < \rho$ por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$ y, por tanto, $f_n(x) \leqslant f_n(\rho)$ para todo $x \geqslant \rho$. Puesto que, para $a > 0$, la serie $\sum f_n(\rho)$ converge, se sigue, por el criterio de Weierstrass, que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

b) Si $a > 1/2$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{a+1/2}}$ es convergente (es una serie de Riemann con exponente $a+1/2 > 1$). Como para todo $x \geqslant 0$ es $f_n(x) \leqslant f_n(1/\sqrt{n})$, el criterio de Weierstrass implica que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$. ◀

Ejercicio 11. Observa que f_n es continua y positiva en $[0,1]$ y se anula en los extremos del intervalo. Como $f_n'(x) = (n\log x + 2)x^{n-1}\log x$, se sigue que en el punto $c_n = \exp(-2/n)$ la función f_n alcanza un máximo absoluto en $[0,1]$. Luego $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(c_n) = \mathrm{e}^{-2}\,4/n^2$ y, puesto que la serie $\sum \dfrac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{n^2}$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$. En consecuencia, se verificará que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x(\log x)^2}{1-x} \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_n(x)\,dx = 2\frac{1}{(n+1)^3}$$

(compruébalo integrando por partes), resulta la igualdad del enunciado.

◀

Ejercicio 12. Puesto que, para $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{|x|}{1+n^2x^2} = \frac{1}{|x|}$$

se sigue, por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera) que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{|x|}{1+n^2x^2}$ es convergente. Evidentemente, dicha serie converge también para $x=0$.

Para estudiar la convergencia uniforme veamos qué información nos da el criterio de Weierstrass. Tenemos que

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

y deducimos que f_n es creciente en $[0,1/n]$ y decreciente en $[1/n,+\infty[$. Como $f_n(-x) = -f_n(x)$, deducimos que $|f_n(x)| \leqslant f_n(1/n) = 1/2n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como la serie $\sum 1/2n$ no es convergente el criterio de Weierstrass *no nos dice nada* acerca de la convergencia uniforme de la serie *en todo* $\mathbb{R}$ (observa que el criterio de Weierstrass da condiciones *suficientes* pero no *necesarias* para la convergencia uniforme). Sin embargo, dicho criterio si nos proporciona información cuando consideramos un conjunto de la forma $A_\rho = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant \rho\}$, donde $\rho > 0$. Pues, tomando n_0 tal que $1/n_0 < \rho$, para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $1/n < \rho$, por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$ y, en consecuencia $|f_n(x)| \leqslant f_n(\rho)$ para todo $x \in A_\rho$. Puesto que la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, el criterio de Weierstrass nos dice que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ.

La única duda que queda por resolver es si la serie converge uniformemente en algún intervalo de la forma $[-\rho, \rho]$ con $\rho > 0$ (en cuyo caso sería uniformemente convergente en todo $\mathbb{R}$). Pronto saldremos de dudas.

Calculemos los límites laterales en $x = 0$ de la función suma de la serie.

Usando la sugerencia del enunciado tenemos, supuesto $x>0$, que

$$\begin{aligned}\int_0^{n+1}\frac{x}{1+t^2x^2}dt &= \sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\frac{x}{1+t^2x^2}dt \leqslant \sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\frac{x}{1+k^2x^2}dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = x+\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{1+k^2x^2} \leqslant \\ &\leqslant x+\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{x}{1+t^2x^2}dt = x+\int_0^{n}\frac{x}{1+t^2x^2}dt\end{aligned}$$

deducimos que $\operatorname{arc\,tg}((n+1)x)\leqslant\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\leqslant x+\operatorname{arc\,tg}(nx)$. Tomando límites para $n\to\infty$ en esta desigualdad obtenemos $\pi/2\leqslant F(x)\leqslant\pi/2+x$. Como esta desigualdad es válida para todo $x>0$, se sigue que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)=\pi/2$.

Como $F(-x)=-F(x)$, se deduce que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)=-\pi/2$. Por tanto, la función F tiene una discontinuidad de salto en $x=0$.

Como las funciones f_n son continuas en $\mathbb{R}$ deducimos que la serie $\sum f_n$ no puede ser uniformemente convergente en ningún intervalo de la forma

$[-\rho,\rho]$ con $\rho > 0$ pues, si así ocurriera, la función suma habría de ser continua en dicho intervalo y, por tanto sería continua en $x = 0$ lo que acabamos de probar que no es cierto.
Fíjate en que la función F sí es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pues cualquier número $a \neq 0$ podemos meterlo dentro de un conveniente conjunto A_ρ, sin más que tomar $\rho < |a|$, y como la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ, la función suma, F, es continua en A_ρ y, por la propiedad local de la continuidad, se sigue que F es continua en a.

◀

Ejercicio 13.

Estudiemos la convergencia puntual. Para $x > 0$ la serie $\sum f_n(x)$ es de términos positivos y podemos aplicar el criterio del cociente. Tenemos que

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^{n+1}}x\,\mathrm{e}^{-x} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} x\,\mathrm{e}^{-x} \to x\,\mathrm{e}^{1-x}$$

Consideremos la función $\varphi(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x}$. Se tiene que $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{1-x}(1-x)$ y, fácilmente, se deduce que φ es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,+\infty[$. Luego para $x > 0$, $x \neq 1$ se tiene que $\varphi(x) < \varphi(1) = 1$. Por tanto, el criterio del cociente implica que la serie converge para todo número real positivo $x \neq 1$. En este caso el criterio del cociente también proporciona información para $x = 1$, pues aunque

$$\lim \frac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-1} = 1$$

como la sucesión $(1+1/n)^{n+1}$ es decreciente, se tiene que dicho límite se acerca a 1 *por valores mayores que* 1, es decir $\dfrac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} \geqslant 1$, lo que claramente implica que $\{f_n(1)\}$ no converge a cero y, por tanto, la serie $\sum f_n(1)$ no converge por no cumplir la condición necesaria básica de convergencia para series.

Estudiemos la convergencia uniforme. Tenemos que

$$f_n'(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} n x^{n-1} \mathrm{e}^{-nx}(1-x)$$

Y, al igual que antes, se sigue que f_n es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,+|\infty[$. Dado $\rho > 1$, para todo $x \geqslant \rho$ es $f_n(x) \leqslant f_n(\rho)$ y como la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho,+\infty[$. Análogamente se comprueba que hay convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,\rho]$ donde $0 < \rho < 1$. ◄

Ejercicio 14.
Empezamos viendo para qué valores de x la serie dada converge absolutamente. Para ello, aplicamos el criterio del cociente a la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}$.

Puesto que:

$$\frac{|x|^{2(n+1)}}{(n+1)(2n+1)}\frac{n(2n-1)}{|x|^{2n}} = |x|^2\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} \to |x|^2$$

deducimos que la serie dada converge absolutamente si $|x|^2 < 1$, es decir, si $|x| < 1$. Deducimos así que $]-1,1[$ es el intervalo de convergencia de la serie. Sea $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ la función suma de la serie: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Recuerda que las series de potencias pueden derivarse e integrarse término a término en su intervalo de convergencia.

Por tanto, para $-1 < x < 1$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, y

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(x^2)^n = \frac{2}{1-x^2}$$

Puesto que $f(0) = f'(0) = 0$, deducimos que

$$f'(x) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2}dt = \log(1+x) - \log(1-x)$$

y por tanto, para $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = \int_0^x (\log(1+t) - \log(1-t))\,dt = (1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x)$$

◀

Ejercicio 15.

Podemos hacer este ejercicio directamente, con un sencillo cálculo. Como sigue a continuación.

En la igualdad

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^k = \frac{1-(-1)^{n+1}u^{n+1}}{1+u}$$

Hagamos $u = x^q$ para obtener

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{qk} = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}$$

Integrando esta igualdad en el intervalo $[0,1]$, obtenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{qk+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}\,dx$$

Tomando ahora límites para $n \to \infty$, y teniendo en cuenta que

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1+x^q}\, dx \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1+x^q} \right| dx \leqslant \int_0^1 x^{qn+q} dx = \frac{1}{qn+q+1}$$

obtenemos la igualdad

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{qn+1}$$

Finalmente

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\log 2}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

También podemos hacer este ejercicio teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{1+x^q}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^q)^n \qquad (|x|<1)$$

Como las series de potencias pueden integrarse término a término en su intervalo de convergencia, se sigue que para todo $0<t<1$ es

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^q}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^t x^{qn}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{qn+1}}{qn+1} \qquad (1)$$

Ahora, la serie $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{t^{qn+1}}{qn+1}$, es una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es $]-1,1[$ y que, en virtud del criterio de Leibnitz para series alternadas, converge para $t=1$. En consecuencia, por el teorema de Abel, se verifica que dicha serie converge uniformemente en $[0,1]$ y por tanto

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{qn+1}}{qn+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{qn+1}$$

Como, evidentemente, se verifica que

$$\lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{1}{1+x^q}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^q}dx$$

Deducimos, por (1), que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{qn+1}$$

◄

Ejercicio 16.

Sea $f(t) = \dfrac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $-1 < t < 1$. Tenemos $t\,f'(t) = \dfrac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nt^n$. Haciendo en estas igualdades $t = x^3/2$, supuesto que $-1 < x^3/2 < 1$, deducimos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^3}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x^3}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-x^3/2} + \frac{x^3/2}{(1-x^3/2)^2} = \frac{4}{(x^3-2)^2}\end{aligned}$$

Análogamente, haciendo $t = (x+3)/2$, supuesto que $-1 < (x+3)/2 < 1$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x+3}{2}\right)^n = \frac{x+3}{2(1+(x+3)/2)^2} = 2\frac{3+x}{(5+x)^2}$$

◀

Ejercicio 17.

Sea $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1 < x < 1$. Tenemos $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.
También $\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, $-1 < x < 1$. Integrando esta igualdad obtenemos

$$\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}dx = \frac{x}{1-x} + \log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

Y deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\log(1-x)}{x} \qquad (-1 < x < 1)$$

En particular, haciendo en esta igualdad $x = 1/2$ resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)} = 2 - 2\log 2$$

◀

Ejercicio 18.

Cualquier serie de potencias del tipo $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n, es decir, $R(n) = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ donde P y Q son funciones polinómicas, tiene radio de convergencia 1. Pues

$$\frac{R(n+1)}{R(n)} = \frac{P(n+1)Q(n)}{P(n)Q(n+1)}$$

es cociente de dos funciones polinómicas en n que tienen el mismo grado y el mismo coeficiente líder, luego su límite para $n \to \infty$ es igual a 1.

Cualquier serie de potencias del tipo $\sum \dfrac{P(n)}{n!}x^n$ donde $P(n)$ es una función polinómica, tiene radio de convergencia infinito. Pues

$$\frac{P(n+1)}{(n+1)!}\frac{n!}{P(n)} = \frac{P(n+1)}{P(n)}\frac{1}{n+1}$$

y basta notar que, evidentemente, $\lim_{n\to\infty} P(n+1)/P(n) = 1$.

Teniendo en cuenta que $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ se sigue que las series primera y tercera tienen radio de convergencia 1 y la segunda serie tiene radio de convergencia $+\infty$.

Para calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n$ lo más fácil es expresar n^3+n+3 en potencias de $n+1$. Basta para ello hacer el desarrollo de Taylor del polinomio $P(x)=x^3+x+3$ centrado en $x=-1$. Como $P(-x)=-P(x)$ la derivada segunda de P en $x=0$ es cero. Tenemos así que

$$P(x)=P(-1)+P'(-1)(x+1)+\frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3=1+4(x+1)+(x+1)^3$$

Luego

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+4+(n+1)^2\right)x^n=\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n+5)x^n\end{aligned}$$

La serie $\sum x^n/(n+1)$ se obtiene integrando la serie geométrica $\sum x^n$ y dividiendo por x, de donde se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{\log(1-x)}{x} \qquad (-1 < x < 1)$$

La suma de la serie $\sum(n^2+2n+5)x^n$ puede calcularse también derivando dos veces la serie geométrica. Seguiremos otro procedimiento que es general para sumar series del tipo $\sum Q(n)x^n$ donde $Q(n)$ es un polinomio.
En nuestro caso $Q(n) = n^2+2n+5$. Observa que $Q(n+1)-Q(n) = 3+2n$, por tanto

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{n} Q(k)x^k(1-x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \big(Q(k)x^k - Q(k)x^{k+1}\big) = \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \big(Q(k+1) - Q(x)\big)x^{k+1} + Q(0) - Q(n)x^{n+1} = \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} (3+2k)x^{k+1} + 5 - Q(n)x^{n+1}
\end{aligned}$$

Tomando límites para $n \to \infty$ en esta igualdad, teniendo en cuenta que para

$-1<x<1$ es $\lim\limits_{n\to\infty} Q(n)x^{n+1}=0$, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n &= \frac{5}{1-x}+\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(3+2n)x^{n+1} = \\ &= \frac{5}{1-x}+\frac{3x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \\ &= \frac{5}{1-x}+\frac{3x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}=\frac{4x^2-7x+5}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n = -\frac{\log(1-x)}{x}+\frac{4x^2-7x+5}{(1-x)^3} \qquad (-1<x<1)$$

La suma de la tercera serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2+\cdots+n}x^n = \sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{n(n+1)}x^n$ puede obtenerse muy fácilmente integrando dos veces la serie geométrica. Seguiremos otro procedimiento que suele ser efectivo para sumar series de la forma $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n y que consiste en descomponer $R(n)$ en elementos simples. En nuestro caso tenemos

$$R(n) = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$, se obtiene fácilmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} x^n = -2\log(1-x) + 2\frac{\log(1-x)+x}{x}$$

Para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!} x^n$, usaremos que $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. La idea consiste en escribir el polinomio como $n^3 = n(n-1)(n-2) + An(n-1) + Bn + C$.

Identificando coeficientes resulta $A=3, B=1, C=0$. Por tanto

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n}{n!}x^n = \\ &= \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(n-2)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(n-1)!}x^n = \\ &= (x^3+3x^2+x)\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Este método puede usarse para sumar series del tipo $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$ donde $P(n)$ es un polinomio. ◄

Ejercicio 19.

Observa que el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(2n+1)} x^n$ es el intervalo $]-1,1[$ y que la serie converge también en los extremos del intervalo de convergencia. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ la función suma

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}x^n \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

Como consecuencia del teorema de Abel, la función f es continua en $[-1,1]$.

Nota Observa que puede aplicarse el criterio de Weierstrass en el intervalo $[-1,1]$; lo que justifica, sin necesidad de recurrir al teorema de Abel, que la serie converge uniformemente en $[-1,1]$ y, por tanto, la función f es continua en $[-1,1]$.

Por el teorema de derivación para funciones definidas por series de potencias, la función f es indefinidamente derivable en el intervalo $]-1,1[$ y

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2n+1}\qquad(-1<x<1)$$

es decir

$$xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{2n+1}\qquad(-1<x<1)$$

La forma que tiene f' nos sugiere considerar la función

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad(-1<x<1)$$

que se calcula fácilmente, pues

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^{2}}$$

Como $g(0) = 0$, deducimos que

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\log(1-x)$$

Ahora relacionaremos f' con g. Para $0 < x < 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} g(\sqrt{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \sqrt{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \\ &= \sqrt{x} + x\sqrt{x}\,f'(x) \end{aligned}$$

De donde

$$f'(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\log(1+\sqrt{x}) - \log(1-\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \qquad (0 < x < 1)$$

Integrando por partes se obtiene que una primitiva de f en $]0,1[$ viene dada por

$$h(x) = \frac{(1-\sqrt{x})\log(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \qquad (0 < x < 1)$$

Deducimos que

$$f(x) = h(x) - \lim_{x\to 0} h(x) = 2 + h(x) \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

Como f es continua en $[-1,1]$, obtenemos

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = \lim_{x\to 1} f(x) = 2 - \lim_{x\to 1} h(x) = 2 - 2\log 2$$

Consideremos ahora que $-1 < x < 0$. Tenemos

$$x f'(x) = -|x| f'(-|x|) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} |x|^n \qquad (-1 < x < 0)$$

Consideraremos ahora la función

$$\varphi(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (-1 < x < 1)$$

Como

$$\varphi'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = -\frac{1}{1+x^2}$$

y $\varphi(0)=0$, deducimos que

$$\varphi(x)=-\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt=-\operatorname{arc\,tg}x$$

Al igual que antes deducimos que

$$f'(x)=\frac{\sqrt{-x}-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{-x})}{x\sqrt{-x}}\qquad(-1<x<0)$$

o lo que es igual

$$-f'(-x)=\frac{\sqrt{x}-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}\qquad(0<x<1)$$

Como $-f'(-x)$ es la derivada de la función $x\mapsto f(-x)$, integrando por partes se obtiene que una primitiva de la función $x\mapsto f(-x)$ en $]0,1[$ es

$$H(x)=2\frac{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+\log(1+x)\qquad(0<x<1)$$

Deducimos que

$$f(-x) = H(x) - \lim_{x \to 0} H(x) = H(x) - 2 \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

Como f es continua en $[-1,1]$, obtenemos

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} = \lim_{x \to 1} f(-x) = \lim_{x \to 1} H(x) - 2 = \frac{\pi}{2} + \log 2 - 2$$

◀

Ejercicio 20.
Las funciones del enunciado responden todas ellas al siguiente modelo. Supongamos que tenemos una serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$, con radio de convergencia no nulo. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y sea $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ la función suma. En virtud del teorema de derivación para series de potencias, sabemos que la función F es de clase C^∞ en I. Sea ahora $q \in \mathbb{N}$ y consideremos la función $G : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \frac{F(x) - \sum_{k=0}^{q} c_k(x-a)^k}{(x-a)^{q+1}}, \quad G(a) = c_{q+1}$$

Es evidente que

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{q+1+n}(x-a)^n \qquad (x \in I)$$

Por tanto, la función G *es la suma de una serie de potencias* en el intervalo I y, por tanto, G es de clase C^∞ en I.

Teniendo en cuenta que

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n} \qquad (-1<x<1)$$

Se sigue que las funciones g, f, h son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y la función φ es de clase C^∞ en $]-1,1[$. Pero es evidente que φ es de clase C^∞ en $]1/2,+\infty[$, luego φ es de clase C^∞ en $]-1,+\infty[$. ◄